Составил: доц.Коротков Н.А.,
компьютерная вёрстка: доц. Коротков Н.А..

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Что такое "множество"?

Множество - это совокупность некоторых (произвольных) объектов, называемых элементами, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается скобками {...}, внутри которых либо просто перечислены элементы, либо описываются их свойства. Обычно множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

2. Определение равных множеств, подмножеств, надмножеств, пустого множества.

Два множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A является ***подмножеством*** множества B, если любой элемент множества A является также элементом множества B. Множество B в этом случае является ***надмножеством*** множества A. ***Пустое множество*** - это множество, не содержащее ни одного элемента.

3. Основные операции над множествами

Основными операциями над множествами являются: ***объединение*** ($\cup$), ***пересечение*** ($\cap$), ***разность*** (\\), ***симметрическая разность*** (***прямая сумма***) (Δ).

$C = A\cup B = \{x\in C \mid (x\in A)\vee(x\in B)\}$;

$C = A\cap B = \{x\in C \mid (x\in A)\wedge(x\in B)\}$;

$C = A\backslash B = \{x\in C \mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\}$;

$C = A\ \Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

4. Равномощные множества. Счетные множества, континуум.

Два множества называются ***равномощными***, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется ***счетным***. Множество, равномощное множеству вещественных чисел, имеет мощность ***континуум***.

5. Определение предела последовательности на "языке ε–*N* (эпсилон-эн)".

Число A называется ***пределом последовательности*** a_n при $n\to\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех n, удовлетворяющих неравенству $n > N$, справедливо неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Тогда пишут $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

6. Дать определение натуральным, целым и рациональным числам.

Натуральное число − это число, возникающее при счете. ***Целое число*** − это или натуральное число, или ноль, или целое отрицательное число. ***Рациональное число*** − это отношение целого числа к натуральному.

7. Отличие в записи рациональных и иррациональных чисел при представлении их в виде десятичной дроби.

Рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Иррациональное число может быть записано в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

8. Дать определение понятию "высказывание".

Высказыванием называется повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, при этом непременно истинное или ложное.

9. Определение основных логических функций.

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно. Оно обозначается $\neg x$.

Дизъюнкцией (***логическим сложением***) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x и y истинно, и ложным, если они оба ложны. Оно обозначается $x\vee y$.

Конъюнкцией (***логическим умножением***) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y истинны, и ложно, когда хотя бы одно из x и y ложно. Оно обозначается $x\wedge y$.

Импликацией (***логическим следованием***) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y ложно, и истинным во всех остальных случаях. Оно обозначается $x \to y$. Высказывание x называется *условием*, *посылкой* или *антецедентом*, а высказывание y − *следствием*, *заключением* или *консеквентом*.

Эквиваленцией (***эквивалентностью***, ***логической эквивалентностью***) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое истинно, когда оба высказывания x и y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложно в остальных случаях. Оно обозначается $x \leftrightarrow y$.

10. Перечислить основные равносильности.

1. $A \wedge A = A$ − закон идемпотентности конъюнкции.
2. $A \vee A = A$ − закон идемпотентности дизъюнкции.
3. $A \wedge 1 = A$; 1 − истина.
4. $A \vee 1 = 1$.
5. $A \wedge 0 = 0$, 0 − ложь.
6. $A \vee 0 = A$.
7. $A \wedge \neg A = 0$ − закон противоречия.
8. $A \vee \neg A = 1$ − закон исключения третьего.
9. $\neg(\neg A) = A$ − закон снятия двойного отрицания.

11. Законы де Моргана.

$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ − первый закон де Моргана.

$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ − второй закон де Моргана.

12. Определение определителей 2-го и 3-го порядков.

Пусть задана матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Число, которое определяется по правилу: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, называется ***определителем второго порядка*** и обозначается

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пусть задана матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. ***Определителем третьего порядка*** называется число, вычисляемое по правилу:

$$\Delta = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определитель 3-го порядка можно вычислять по формуле

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

13. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы.

Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ — чётное число, и со знаком «минус», если сумма нечётна.

14. Определение обратной матрицы

Пусть A – квадратная матрица n – ого порядка. ***Обратной*** для матрицы A называется матрица, обозначаемая A^{-1}, для которой выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю: $|A| \neq 0$.

15. Теорема Крамера.

Если определитель системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по ***формулам Крамера***

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель системы, а вспомогательные определители Δ_j получаются из Δ заменой столбца из коэффициентов при неизвестной x_j столбцом свободных членов ($j = 1, 2, \ldots, n$).

16. Определение неориентированного графа и порядка графа.

Пусть S − непустое множество, $V^{(2)}$ − множество всех его двухэлементных подмножеств, $U \subseteq V^{(2)}$. Тогда пара (S, U) называется **неориентированным графом**. Элементы множества S называются вершинами графа, а элементы множества U − ребрами. Обозначение графа $G = (S, U)$.

Число вершин графа $n = |S|$ называется **порядком графа**.

17. Определение связного графа и дерева.

Граф называется **связным**, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Маршрут – чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершинами, в которой любая пара соседних элементов инцидентна.

Дерево – связный граф, в котором вершин на одну больше, чем ребер.